

# Analyse de stabilité multi-échelles d'une nappe fibrée en compression

E. Lignon<sup>1</sup>, P. Le Tallec<sup>2</sup>, N. Triantafyllidis<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LMS, Ecole Polytechnique, France, eric.lignon@polytechnique.edu

<sup>2</sup> LMS, Ecole Polytechnique, France, patrick.letallec@polytechnique.fr

<sup>3</sup> LMS, Ecole Polytechnique, France, nicolas.triantafyllidis@polytechnique.edu

**Résumé** — L'objectif de ce travail est de modéliser le flambement de nappes fibrées lorsque les câbles sont soumis à une compression axiale. Nous réalisons une analyse de stabilité multi-échelles basée sur le résultat de [1], qui permet de réduire le problème à une cellule élémentaire 2D et de modéliser les modes propres sous forme d'ondes de Bloch. Nous avons choisi de nous placer dans le cas particulier d'une flexion circulaire, mais la méthode proposée est valable pour des chargement plus généraux.

**Mots clés** — Analyse de stabilité, modélisation multi-échelles, flambement sous compression, ondes de Bloch.

## 1 Problème mécanique et motivation

### Géométrie

On se place dans l'espace  $E = \mathbb{R}^3$ , dans lequel on choisit un repère orthonormé  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . On considère une éprouvette initialement plane, dont le volume est noté  $\Omega$ . On note  $L_1$  et  $L_2$  ses dimensions dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , alors que son épaisseur selon  $\underline{e}_3$  est notée  $h$ . Ce solide est composé de trois matériaux :

- Une fine lame métallique, appelée clinquant, sur la partie supérieure. Cette lame est supposée avoir une rigidité en extension très élevée, de telle sorte qu'elle sera supposée inextensible dans la suite ;
- Des câbles de renforts à section circulaire, de rayon  $r$ , situés dans la partie inférieure de la nappe. Au repos, ces câbles sont supposés rectilignes et parallèles à  $\underline{e}_1$  ;
- Une gomme hyperélastique pouvant subir de très grandes déformations.

On suppose par ailleurs que l'écartement entre les câbles est constant, noté  $e$ . Cette hypothèse permet de considérer une géométrie périodique, de telle sorte que le volume 3D de l'éprouvette, noté  $\Omega$ , peut être décomposé en cellules élémentaires 2D identiques, notées  $\Omega_e$ .

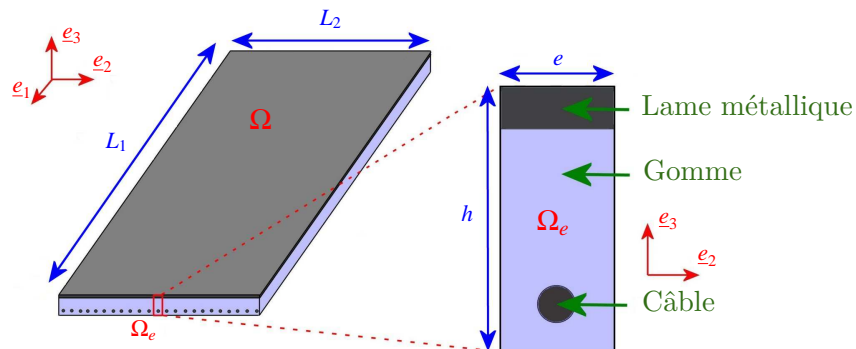


FIG. 1 – Géométrie de l'éprouvette

Par ailleurs, on va supposer dans la suite que la relation suivante est respectée :

$$e, h \ll L_1, L_2$$

Cette hypothèse permet de supposer que le solide est de dimension infinie dans les directions  $e_1$  et  $e_2$ , ce qui permet de négliger les effets de bords. Ainsi, on pourra considérer que toutes les cellules élémentaire  $\Omega_e$  se déforment de la même manière pour un chargement uniforme.

### Chargement

L'idée globale est de soumettre la nappe à une flexion circulaire sur sa face supérieure, de manière à créer une compression axiale des câbles dans la partie inférieure. Plus précisément, on souhaite créer une courbure  $\rho$  dans l'ensemble de la structure, en supposant que la lame métallique supérieure ne subit pas d'extension.

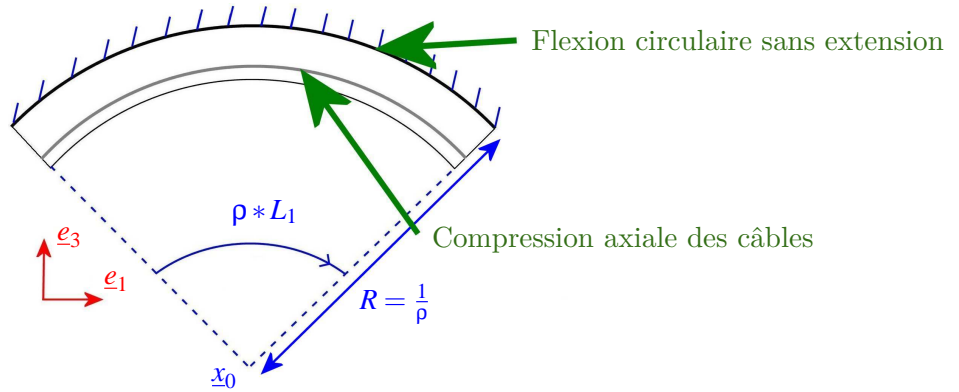


FIG. 2 – Chargement sur l'éprouvette.

Il est bien connu que les structures fines résistent mal à de fortes compressions. La modélisation du flambement des nappes fibrées sous compression a d'ailleurs déjà été étudiée par exemple par [2] en l'assimilant à un milieu stratifié 2D. Si la compression des câbles devient trop forte, on s'attend à ce que l'équilibre devienne instable et qu'ils mettent la structure en flambement comme illustré sur le schéma 3. L'objectif de ce travail est alors d'étudier la stabilité de la structure en fonction du paramètre de courbure  $\rho$ , et de détecter les points de bifurcations de la solution principale.

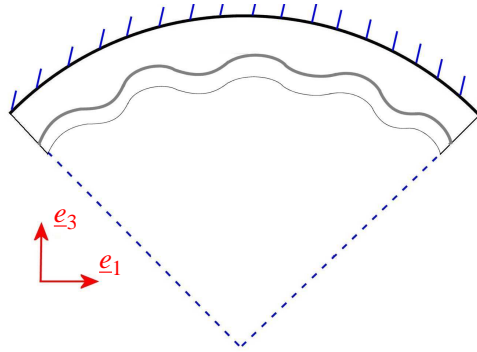


FIG. 3 – Flambement de l'éprouvette en forte flexion circulaire.

## 2 Modélisation micro-mécanique par ondes de Bloch

### 2.1 Calcul de la solution principale

Par hypothèses de périodicité par rapport à  $X_2$  et d'indépendance en  $X_1$ , la solution fondamentale  $\underline{x}_b \in H_p(\Omega)$  du problème est cherchée sous la forme :

$$\forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2], \forall X_3 \in [0; h], \underline{x}_b(X_1, X_2, X_3) = \underline{x}_0 + \underline{\underline{R}}(\rho X_1) \cdot \underline{p}(X_2, X_3) + X_2 \underline{e}_2 \quad (1)$$

où  $\underline{\underline{R}}(\rho X_1)$  est le tenseur de rotation d'angle  $\theta = \rho X_1$  défini par

$$\underline{\underline{R}}(\rho X_1) = \underline{e}_\theta(\rho X_1) \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_r(\rho X_1) \otimes \underline{e}_3$$

et  $\underline{p}$  est une fonction vecteur exprimée dans le repère local à chaque cellule, indépendante de  $X_1$  et périodique par rapport à  $X_2$ , vérifiant la condition aux limites :

$$\forall X_2 \in [-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}], \underline{p}(X_2, h) = \frac{1}{\rho} \underline{e}_3 \quad (2)$$

On peut remarquer que pour toute configuration déformée  $\underline{x} \in H(\Omega)$  de la forme 1, le gradient de déformation  $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$  est égal à :

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial X_1} \cdot \underline{p}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \underline{\underline{R}}(\rho X_1) \cdot (\underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_2 + \underline{\underline{R}}(\rho X_1) \cdot \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3, \quad (3)$$

ce qui peut être simplifié sous la forme

$$\underline{\underline{F}}(X_1, X_2, X_3) = \underline{\underline{R}}(\rho X_1) \cdot \left[ \underline{\underline{A}}(\rho) \cdot \underline{p}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + (\underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \quad (3)$$

où le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  est défini par

$$\underline{\underline{A}}(\rho) = \rho(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3) \quad (4)$$

#### Problème 2D associé

On cherche donc la solution principale  $\underline{x}_b$  sous la forme 1, satisfaisant l'équation d'Euler-Lagrange locale par cellule

$$\forall \hat{\underline{x}} \in H_0(\Omega), \int \int \int_{\Omega} \underline{\underline{P}}(\nabla \hat{\underline{x}}) : \nabla \hat{\underline{x}} dX_1 dX_2 dX_3 = 0$$

Elle doit en particulier satisfaire l'équation :

$$\forall \hat{\underline{p}} \in K_0^{per}(\Omega_e), \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{F}}} \left( \underline{\underline{A}} \cdot \underline{p}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + (\underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right) : \left[ \underline{\underline{A}} \cdot \hat{\underline{p}}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \hat{\underline{p}}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \hat{\underline{p}}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX = 0$$

Dans cette équation, le terme de rotation n'intervient pas, car les équations d'équilibre sont invariantes par changement de référentiel.

En utilisant la périodicité par rapport à  $X_2$  et l'indépendance en  $X_1$ , ceci est équivalent au problème suivant sur une cellule élémentaire 2D :

Trouver  $\underline{p} \in K_p^{per}(\Omega_e)$  tel que  $\forall \hat{\underline{p}} \in K_0^{per}(\Omega_e)$ ,

$$\int \int_{\Omega_e} \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{F}}} \left( \underline{\underline{A}} \cdot \underline{p}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + (\underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right) : \left[ \underline{\underline{A}} \cdot \hat{\underline{p}}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \hat{\underline{p}}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \hat{\underline{p}}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX_2 dX_3 = 0 \quad (5)$$

## 2.2 Analyse de stabilité de l'équilibre

Etant donnée une courbure  $\underline{\rho}$ , on suppose avoir résolu le problème d'équilibre précédent et on note  $\underline{x}_b$  la solution principale périodique. On connaît alors le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{P}}$  ainsi que le tenseur tangent du 4<sup>e</sup> ordre noté  $\underline{\underline{L}}$ , tous deux exprimés dans le repère  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) \otimes (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . Les caractéristiques de notre problème nous assurent qu'ils sont tous les deux indépendants de  $X_1$  et périodiques en  $X_2$  :

$$\underline{\underline{P}}(\underline{\rho}, X_2 + n * e, X_3) = \underline{\underline{P}}(\underline{\rho}, X_2, X_3)$$

$$\underline{\underline{L}}(\underline{\rho}, X_2 + n * e, X_3) = \underline{\underline{L}}(\underline{\rho}, X_2, X_3)$$

La solution principale  $\underline{x}_b$  est stable si elle correspond à un minimum local de l'énergie de la structure :

$$\forall \underline{\delta x} \neq \underline{0}, W(\underline{x}_b + \underline{\delta x}) > W(\underline{x}_b)$$

Plus précisément, si on introduit la fonctionnelle quadratique

$$\begin{aligned} F_\Omega : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{H}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{\rho}, \underline{\delta x}) &\mapsto \iint_{\Omega} \overline{\underline{\nabla \delta x}} : \frac{\partial^2 w}{\partial \underline{F}^2}(\underline{\rho}, X_2, X_3) : \underline{\underline{\nabla \delta x}} d\Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

alors la définie-positivité de  $F_\Omega$  suffit pour assurer la stabilité de l'équilibre (critère de seconde variation). Par conséquent, l'équilibre principal est stable si sa plus petite valeur propre  $\beta(\underline{\rho})$  définie ci-dessous est strictement positive : (l est linéairement instable si  $\beta(\underline{\rho}) < 0$ )

$$\beta(\underline{\rho}) = \min_{\underline{\delta x} \in \mathbb{H}_0(\Omega)} \left\{ \frac{1}{\|\underline{\delta x}\|_{\mathbb{H}}^2} F_\Omega(\underline{\rho}, \underline{\delta x}) \right\} \quad (7)$$

où la semi-norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$  est définie par :

$$\|\underline{\delta x}\|_{\mathbb{H}}^2 = \iint_{\Omega} \overline{\underline{\nabla \delta x}} : \underline{\underline{\nabla \delta x}} d\Omega \quad (8)$$

*Remarque* : Dans le cas de matériaux elasto-plastiques, le critère de seconde variation est remplacé par une condition analogue, appelée "critère de bifurcation de Hill" (cf [3]). La démarche décrite ici pourra donc facilement être généralisée à cette classe de matériaux, comme cela est fait dans [4].

### 2.2.1 Modes propres

Notre structure étant supposée parfaitement périodique, on utilise le résultat de [1], selon lequel la plus petite valeur propre  $\beta(\underline{\rho})$  de  $F_\Omega$  peut être calculée en se limitant dans l'expression 7 aux perturbations exprimées sous la forme d'ondes de Bloch (cf [5]) :

$$\underline{\delta x}[\underline{\omega}_1, \underline{\omega}_2, \underline{\delta p}](X_1, X_2, X_3) = \exp(i\underline{\omega}_1 X_1 + i\underline{\omega}_2 X_2) \underline{\underline{R}}(\underline{\rho} X_1) \cdot \underline{\delta p}(X_2, X_3) \quad (9)$$

où  $(\underline{\omega}_1, \underline{\omega}_2) \in \mathbb{R}^+ \times \left[0; \frac{2\pi}{e}\right]$  sont les nombres d'ondes du mode propre dans les directions des coordonnées  $X_1$  et  $X_2$  respectivement, alors que  $\underline{\delta p}$  appartient à l'espace  $\mathbb{K}_0(\Omega_e)$  et est  $X_2$ -périodique :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \forall X_3 \in [0; h], \quad \underline{\delta p}(X_2 + n * e, X_3) = \underline{\delta p}(X_2, X_3)$$

Introduisons la nouvelle variable  $\underline{\delta q} \in \mathbb{K}_0(\Omega_e)$  définie par :

$$\forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \forall X_3 \in [0; h], \quad \underline{\delta q}(X_2, X_3) = \exp(i\underline{\omega}_2 X_2) \underline{\delta p}(X_2, X_3)$$

et vérifiant donc les conditions aux limites :

$$\forall X_2 \in [-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}], \forall X_3 \in [0; h], \quad \underline{\delta q}(X_2 + e, X_3) = \exp(-i\omega_2 e) \underline{\delta q}(X_2, X_3) \quad (10)$$

L'expression des modes propres 9 peut alors être réécrite sous la forme :

$$\underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)](X_1, X_2, X_3) = \underline{R}(\rho X_1) \cdot \underline{\delta q}(X_2, X_3) \exp(i\omega_1 X_1) \quad (11)$$

avec  $(\omega_1, \omega_2) \in \left[0; \frac{2\pi}{e}\right] * \mathbb{R}^+$  et  $\underline{\delta q} \in \mathbb{K}_0(\Omega_e)$  vérifiant la condition 10. Leur gradient de déformations  $3D$  s'écrit :

$$\underline{\nabla \delta x} = \exp(i\omega_1 X_1) \underline{R}(\rho X_1) \cdot \left[ (\underline{A} \cdot \underline{\delta q}(X_2, X_3) + i\omega_1 \underline{\delta q}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{\delta q}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\delta q}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \quad (12)$$

où le tenseur  $\underline{A}$  est toujours défini par l'expression 4.

Par conséquent, pour trouver la plus petite valeur propre  $\beta(\rho)$ , il est suffisant de parcourir tous les nombres d'onde  $(\omega_1, \omega_2)$  dans  $\mathbb{R}^+ \times [0; \frac{2\pi}{e}]$  et toutes les fonctions  $\underline{\delta q} \in \mathbb{K}_0(\Omega_e)$  vérifiant la condition 10 pour construire :

$$\beta(\rho) = \min_{\omega_1, \omega_2, \underline{\delta q}} \left\{ \frac{1}{\|\underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)]\|_{\Omega}^2} F_{\Omega}(\rho, \underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)]) \right\}$$

Son calcul peut être décomposé en introduisant la quantité suivante, correspondant à la plus petite valeur propre pour un nombre d'onde  $(\omega_1, \omega_2)$  fixé :

$$\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) = \min_{\underline{\delta q}(\omega_2)} \left\{ \frac{1}{\|\underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)]\|_{\Omega}^2} F_{\Omega}(\rho, \underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)]) \right\} \quad (13)$$

de telle sorte que  $\beta(\rho)$  est égal à

$$\beta(\rho) = \inf_{\omega_1, \omega_2} \left\{ \gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) \right\} \quad (14)$$

Par la suite, nous noterons  $\rho_m$  la plus petite courbure pour laquelle la valeur propre 13 est nulle :

$$\rho_m(\omega_1, \omega_2) = \inf_{\rho} \left\{ \rho > 0 \text{ tels que } \gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) = 0 \right\}$$

En notant  $\underline{\delta q} = \underline{\delta u} + i\underline{\delta v}$  et en insérant l'expression 12 dans les écritures 6 et 8, on montre alors que la plus petite valeur propre  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$  peut être calculée à partir d'un seul calcul sur un volume élémentaire  $2D \Omega_e$  :

$$\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) = \min_{\underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)} \left\{ \frac{1}{\|\omega_1, \underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)\|_{\Omega_e}^2} F_{\Omega_e}(\rho, \omega_1, \underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)) \right\} \quad (15)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{\Omega_e}(\rho, \omega_1, \underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)) &= \iint_{\Omega_e} \left[ (\underline{A} \cdot \underline{\delta u}(X_2, X_3) - \omega_1 \underline{\delta v}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\delta u}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\delta u}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \\ &: \underline{L}(\rho, X_2, X_3) : \left[ (\underline{A} \cdot \underline{\delta u}(X_2, X_3) - \omega_1 \underline{\delta v}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\delta u}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\delta u}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \\ &+ \left[ (\underline{A} \cdot \underline{\delta v}(X_2, X_3) + \omega_1 \underline{\delta u}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\delta v}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\delta v}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \\ &: \underline{L}(\rho, X_2, X_3) : \left[ (\underline{A} \cdot \underline{\delta v}(X_2, X_3) + \omega_1 \underline{\delta u}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\delta v}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\delta v}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX_2 dX_3 \end{aligned} \quad (16)$$

et

$$\begin{aligned}
\|\omega_1, \underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)\|_{\Omega_e}^2 = & \int \int_{\Omega_e} (\underline{A} \cdot \underline{\delta u}(X_2, X_3) - \omega_1 \underline{\delta v}(X_2, X_3)) \cdot (\underline{A} \cdot \underline{\delta u}(X_2, X_3) - \omega_1 \underline{\delta v}(X_2, X_3)) \\
& + \int \int_{\Omega_e} (\underline{A} \cdot \underline{\delta v}(X_2, X_3) + \omega_1 \underline{\delta u}(X_2, X_3)) \cdot (\underline{A} \cdot \underline{\delta v}(X_2, X_3) + \omega_1 \underline{\delta u}(X_2, X_3)) \\
& + \frac{\partial \underline{\delta u}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \underline{\delta u}}{\partial X_2}(X_2, X_3) + \frac{\partial \underline{\delta v}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \underline{\delta u}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \\
& + \frac{\partial \underline{\delta u}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \underline{\delta u}}{\partial X_3}(X_2, X_3) + \frac{\partial \underline{\delta v}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \underline{\delta v}}{\partial X_3}(X_2, X_3) dX_2 dX_3
\end{aligned} \tag{17}$$

Les conditions aux limites 10 se traduisent quant à elles par un couplage entre  $\underline{\delta u}$  et  $\underline{\delta v}$  :

$$\forall X_3 \in [0; h], \quad \begin{cases} \underline{\delta u}(\frac{e}{2}, X_3) = \cos(\omega_2 e) \underline{\delta u}(-\frac{e}{2}, X_3) + \sin(\omega_2 e) \underline{\delta v}(-\frac{e}{2}, X_3) \\ \underline{\delta v}(\frac{e}{2}, X_3) = \cos(\omega_2 e) \underline{\delta v}(-\frac{e}{2}, X_3) - \sin(\omega_2 e) \underline{\delta u}(-\frac{e}{2}, X_3) \end{cases} \tag{18}$$

### 2.2.2 Courbure critique

On suppose que le solide considéré est en équilibre stable dans sa configuration non déformée sans chargement (c'est le cas pour un problème mécanique bien posé). La plus petite valeur propre  $\beta$  est alors strictement positive pour une courbure nulle :

$$\beta(0) > 0$$

Lorsqu'on augmente la courbure  $\rho$ , cette plus petite valeur propre va diminuer. Tant qu'elle reste strictement positive, la solution fondamentale périodique calculée précédemment sera le seul équilibre du système, et cet équilibre sera stable. Par contre, lorsque  $\beta(\rho) < 0$ , alors la courbe d'équilibre rencontre un point singulier. La solution perd son unicité et devient linéairement instable. La première instabilité est donc détectée par la plus petite racine de  $\beta(\rho)$ , qui est appelé "courbure critique microscopique" et sera noté  $\rho_c$ .

Autrement dit, on peut définir la courbure critique  $\rho_c$  comme la valeur infimum des courbures  $\rho_m$  pour lesquelles il existe des nombres d'ondes  $(\omega_1^c, \omega_2^c) \in \left[0; \frac{2\pi}{e}\right] * \mathbb{R}^+$  satisfaisant :

$$\rho_c = \inf(\rho_m) \quad \text{tels que} \quad \gamma(\rho_m, \omega_1^c, \omega_2^c) < 0 \tag{19}$$

## 3 Applications numériques

### 3.1 Description du modèle utilisé

On considère une structure possédant les dimensions géométriques suivantes :

- Epaisseur du clinquant :  $H_{cli} = 1.1mm$  ;
- Epaisseur de gomme :  $H_{gom} = 12.5mm$  ;  
→ Epaisseur totale :  $H = 13.6mm$  ;
- Hauteur de la ligne moyenne des câbles :  $h = 1.425mm$  ;
- Rayon d'un câble cylindrique :  $r = 0.42mm$  ;
- Ecartement entre deux câbles :  $e = 2.25mm$ .

Le clinquant et les câbles sont très rigides et ne subissent que de petites déformations. Dans nos calculs, nous les modélisons donc par des matériaux de Saint-Venant Kirchhoff, de densité volumique d'énergie

$$w = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [Tr(\underline{e})]^2 + \frac{E}{2(1+\nu)} Tr(\underline{e}^2)$$

avec

$$\begin{cases} E_{cli} = 200 \text{ GPa} \\ \nu_{cli} = 0.33 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_{cab} = 100 \text{ GPa} \\ \nu_{cab} = 0.30 \end{cases}$$

La gomme pouvant subir de grandes déformations, nous utilisons un modèle de Mooney-Rivlin quasi-incompressible :

$$w = C_1 (I_1 - 3 - \ln(I_3)) + C_2 (I_2 - 3 - 2 \ln(I_3)) + \frac{\kappa}{2} (J - 1)^2$$

avec

$$\begin{cases} C_1 = 0.539 \text{ MPa} \\ C_2 = 1.062 \text{ MPa} \\ \kappa = 1000 \text{ MPa} \end{cases}$$

### 3.2 Résultats numériques

Nous représentons sur la figure 4 les déplacements locaux dans une cellule élémentaire correspondant à la solution principale pour une courbure  $\rho = 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1}$ . Nous pouvons voir sur la figure 4(b) que la surface inférieure descend, le déplacement vertical moyen valant  $0.010435 \text{ mm}$ . Ce phénomène est logique, puisque la gomme quasi-incompressible a tendance à gonfler transversalement lorsqu'elle est soumise à une compression axiale, ce qui place sous les câbles à subir encore plus de compression.

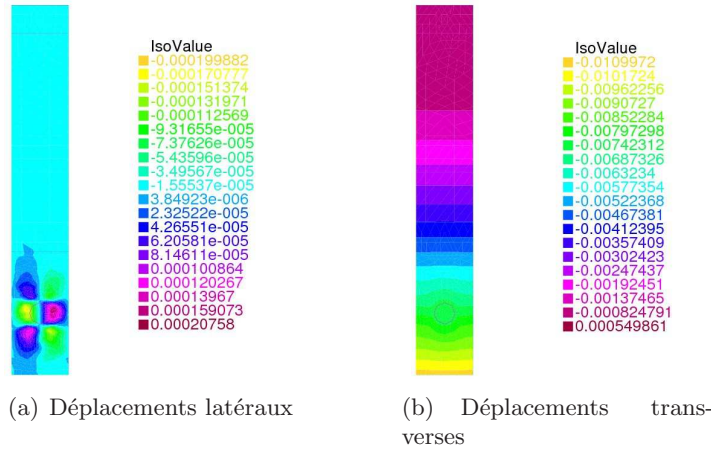


FIG. 4 – Solution principale calculée pour  $\rho = 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1}$ .

La surface  $\rho_m$  décrivant les plus petite courbure pour lesquelles un flambement de longueur d'onde donnée peut apparaître est représentée sur la figure 7. Si nous reprenons la formule 19, nous pouvons lire sur cette figure que la courbure critique correspondant à l'infimum de la surface  $\rho_m$  vaut

$$\rho_c = 1.95 \times 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1}$$

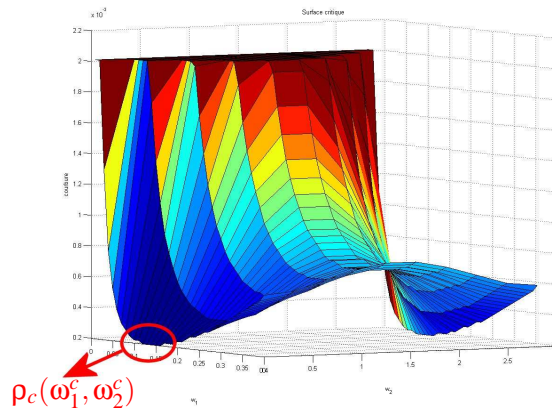


FIG. 5 – Courbe  $\rho_m(\omega_1, \omega_2)$  calculée d'après l'analyse de stabilité locale.

Le nombre d'ondes du flambement correspondant à cette courbure critique peut également être lu sur cette figure :

$$\begin{cases} \omega_1^c = 0.135 \text{ rad.mm}^{-1} \\ \omega_2^c = 0 \text{ rad.mm}^{-1} \end{cases}$$

Le fait que  $\omega_2^c = 0$  signifie que le système reste périodique par rapport à  $X_2$ , et que le flambement, de longueur d'onde  $L_1^c = \frac{2\pi}{\omega_1^c}$  ne se produit que dans la direction des fibres, ce qui est logique.

Pour valider ces résultats, nous les comparons à des calculs réalisés sur la géométrie 3D complète. Nous pouvons voir sur la figure 6 que ces calculs complets 3D permettent de reproduire un flambement le long des fibres. Nous vérifions sur la figure 7 que les seuils d'apparition du flambement obtenus par les deux approches sont très proches.

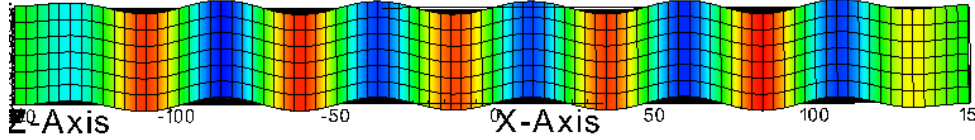


FIG. 6 – Calculs post-flambement réalisés sur la géométrie 3D.

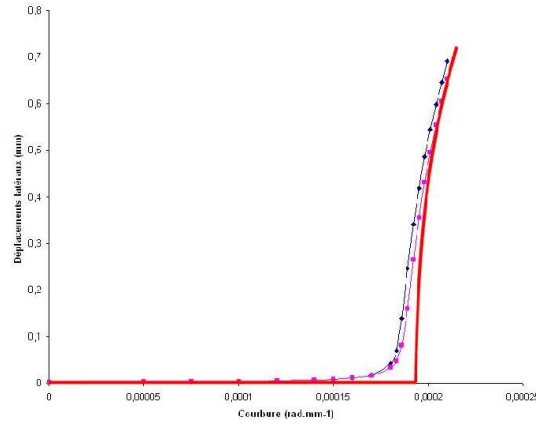


FIG. 7 – Comparaison des seuils de flambement obtenus par les deux approches.

## 4 Conclusions

L'analyse de stabilité multi-échelles présentée dans ce travail permet de prédire avec une très bonne précision le seuil d'apparition du flambement sur des structures fibrées. Cette approche réduit les calculs à une cellule élémentaire 2D, ce qui la rend remarquablement efficace.

## Références

- [1] Geymonat, G., Muller, S., Triantafyllidis, N., *Homogenization of nonlinearly elastic-materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity*, Arch. for rat. Mech. and Ana., 1993.
- [2] Granddier, J., *Résistance en compression des composites à fibres longues*, Dossier d'habilitation à diriger les recherches, 1998.
- [3] Hill, R., *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*, JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS, 1958.
- [4] N. Triantafyllidis, M. Nestorovic, M. Schraad, *Failure surfaces for finitely strained two-phase periodic solids under general in-plane loading*, Journal of appl. mech.-transactions of the ASME, 2006.
- [5] Bloch, F. *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgitter*, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 555-600, 1928.